- части ёмкостей мегарайонов, корреспондирующих через ЦДЧГ, определяются проще и точнее, чем ёмкости отдельных транспортных районов;
- предложенная функция тяготения отличается от существующих тем, что более полно учитывает влияние расстояния на величину корреспонденции, особенно на небольших расстояниях;
- метод разработан специально для расчёта потоков в ЦДЧГ.

Дальнейшие исследования следует направить на уточнение вида функции тяготения путём увеличения числа факторов, влияющих на её вид.

1.Брайловский Н.О., Грановский Б.И. Моделирование транспортных систем. – М.: Транспорт, 1978. – 125 с.
2.Капитанов В.Т., Хилажев Е.Б. Управление транспортными потоками в городах. – М.: Транспорт, 1985. – 94 с.
3.Сильянов В.В. Теория транспортных потоков в проектировании дорог и организации движения. – М.: Транспорт, 1977. – 303 с.
4.Михайлов А.Ю., Головных И.М. Оценка существующей матрицы корреспонденций на основе данных интенсивности движения // Вестник КГТУ. Вып.35. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. – С.191-199.
5.Дубровский В.В. Функция тяготения населения по трудовым целям // Автомобильный транспорт: Сб. науч. трудов. Вып.6. – Харьков: РИО ХГАДТУ, 2001. – С.22-24.
6.Toshio Yoshii Masao Kuwahara Estimation of a Time Dependent OD Matrix from Traffic Counts Using Dynamic Traffic Simulation Institute of Industrial Science, University of Tokyo, 1997. – pp.41-49.
7.Oneyama, H., Kuwahara, M & Yoshii, T. “Estimation of a Time Dependent OD Matrix from Traffic Counts”, The Third Annual World Congress on Intelligent Transport Systems ‘96 Orlando. – pp.77-81.
8.Yoshii, T & Kuwahara, M. “Development of Traffic Network Simulation Model for Oversaturated Traffic Flow on Urban expressways”, Traffic Engineering Vol.30, No.1, 1995. – pp.33-41.
9.Sheffi, Y. Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods, Prentice Hall, 1985. – p.117, web.mit.edu.
10.Лозе Д. Моделирование транспортного предложения и спроса на транспорт для личного и служебного автотранспорта – обзор теорий моделирования, Дрезденский Технический Университет. Институт транспортного планирования и дорожного движения, 2007 // www.ptv-vision.de.

Получено 17.02.2009

УДК 519.85

А.В.БЕЛОГУРОВА, канд. техн. наук
Харьковская национальная академия городского хозяйства

АЛГОРИТМ УМЕНЬШЕНИЯ ЗАТРАТ НА ДОСТАВКУ ГРУЗА В КРАТЧАЙШИЕ СРОКИ

Рассматривается транспортная задача, оптимизируемая по времени доставки груза от источников к потребителям. Предлагается математическая модель задачи доставки

груза в кратчайшие сроки и алгоритм, позволяющий уменьшить затраты на эту доставку.

Задача доставки груза в кратчайшие сроки возникает при стихийных бедствиях, при планировании крупных военных операций, для уменьшения ущерба при пожаротушении и др. [1, 2]. Эту задачу можно отнести к классу «транспортных задач», когда необходимо оптимальным образом перевезти груз из m пунктов отправления в n пунктов назначения.

Как правило, в транспортных задачах минимизируются транспортные издержки, найденные как произведение количества единиц перевозимого груза на затраты по перевозке единицы груза. Задача доставки груза в кратчайшие сроки предполагает *оптимизацию по времени*.

В [3] предлагается алгоритм нахождения плана перевозок, позволяющий подобрать план с наименьшим временем доставки груза, однако не приводится математическая модель данной задачи и нет доказательств сходимости метода.

Чтобы записать математическую модель, введем следующие обозначения: a_i – объемы груза, находящиеся в i-м пункте отправления ($i=\overline{1,m}$); b_j – объемы груза, которые необходимо доставить в j-й пункт назначения ($j=\overline{1,n}$); $[t_{ij}]$ – матрица затрат времени на перевозку груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$); x_{ij} – количество груза, перевозимого из i-го пункта отправления в $j\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$-й пункт назначения ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$); $[c_{ij}]$ – матрица денежных затрат на перевозку груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$).

Данная задача относится к классу закрытых транспортных задач, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Ограничения оптимизационной задачи можно записать следующим образом: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, $i=\overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $j=\overline{1,n}$, $x_{ij} \ge 0$ ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$).

Поскольку время одинаково течет для всех операций по перевозке груза, не будет иметь значения количество груза, перевозимого по маршруту от i к j, а лишь сам факт перевозки по этому маршруту. Тогда время на выполнение всей операции по доставке груза будет определяться самым долгим маршрутом от i к j, по которому перевозится хотя бы одна единица груза. Введем функцию $t_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} = 0 \\ t_{ij}, & x_{ij} > 0 \end{cases}$, которая принимает значение времени доставки от i к j, если по этому маршруту перевозят хотя бы одну единицу груза. Тогда, целевую функцию можно записать следующим образом:

$$Y\left(\overline{x}\right) = \max_k \left[t_{ij}^{(k)}\left(\overline{x}\right) \right] \to \min_{\overline{x} \in \Omega},$$

где $k = \overline{1, m \times n}$.

Математическая модель задачи доставки груза в кратчайшие сроки принимает вид:

$$Y\left(\overline{x}\right) = \max_k \left[t_{ij}^{(k)}\left(\overline{x}\right) \right] \to \min_{\overline{x} \in \Omega},$$

$$\Omega: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим задачу доставки груза в кратчайшие сроки с минимальными затратами. Эта задача относится к многокритериальным задачам, а точнее двухкритериальным задачам с неоднородными по значимости критериями, а именно, оптимизация по времени более предпочтительна, чем оптимизация по финансам.

Алгоритм поиска минимального по времени плана перевозок, предложенный в [3], обладает тем свойством, что получаемое решение сильно зависит от исходного опорного плана, поскольку при поиске оптимального решения затрагиваются только ячейки с максимальным временем и ячейки, входящие в цикл. Поэтому для решения задачи доставки груза в кратчайшие сроки с минимальными затратами предлагается, сначала сузить область допустимых решений, решив обычную транспортную задачу на минимизацию издержек (например, методом потенциалов), а потом искать оптимальное в смысле времени решение. Этот подход соответствует принципу Беллмана для многокритериальной задачи [4].

Предлагается следующий алгоритм:

1. Решаем задачу доставки груза с минимумом затрат. Находим невырожденный оптимальный план задачи

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij} \to \min_{x_{ij}\in\Omega},$$

$$\Omega:\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\\ x_{ij}\ge 0,\end{cases}$$

например, методом потенциалов. Найденное решение используем как опорное решение для задачи доставки груза в кратчайшие сроки

$$\max_{x_{ij}>0}[t_{ij}] \to \min_{x_{ij}\in\Omega},$$

$$\Omega:\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\\ x_{ij}\ge 0.\end{cases}$$

2. Среди всех t_{ij} ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$), для которых $x_{ij}>0$, определяем наибольший элемент $t_{\max}$, $t_{\max}=\max\limits_{x_{ij}>0}\left[t_{ij}\right]$ и вычеркиваем все пустые клетки, в которых время доставки выше $t_{\max}$.

3. Из клетки с $t_{\max}$ строим разгрузочный цикл так, чтобы разгрузить ячейку с $t_{\max}$ (аналогично методу потенциалов).

4. Сделав в свободную вершину цикла поставку ρ (определяемую как в методе потенциалов), проводим компенсации по вершинам цикла и строим новый опорный план.

5. Переходим к шагу 2 данного алгоритма. Зачеркнутые ячейки в дальнейшем рассмотрении не участвуют.

Шаги 2-5 выполняем до тех пор, пока удается построить разгрузочный цикл. Последний полученный план является оптимальным с точки зрения временных затрат, а время доставки груза будет определяться $t_{\max}$ на последней итерации.

Пример решения задачи доставки груза в кратчайшие сроки

Допустим, мы располагаем тремя источниками груза: в первом сосредоточено 30 единиц груза, во втором – 35 единиц, а в третьем – 40 единиц. Груз необходимо доставить как можно быстрее в пять пунктов, причем в первый пункт – 20 единиц, во второй – 34 единицы, в третий – 16 единиц, в четвертый – 10 единиц, а в пятый – 25 единиц груза. Временные затраты на перевозку по каждому маршруту заданы матрицей T, а денежные затраты – матрицей C

$$T = \left\| t_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \left\| c_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Необходимо найти такой план перевозки, при котором время доставки всего груза будет минимальным, а затраты на перевозку будут наименее возможными.

1. Решаем задачу минимизации затрат на доставку груза методом потенциалов и получаем следующее оптимальное решение:

Пункт отправления	Запасы груза	Пункты назначения					u_i
		1	2	3	4	5	
		Потребность					
		20	34	16	10	25	
1	30	5 –	4 –	8 –	5 **5**	1 **25**	2
2	35	3 **20**	2 **15**	4 –	5 –	2 –	1
3	40	3 –	1 **19**	2 **16**	3 **5**	3 –	0
v_j		2	1	2	3	-1	

Денежные затраты на реализацию этого плана составят $z^* = 25 + 25 + 60 + 30 + 19 + 32 + 15 = 206$. Теперь матрицу C заменяем матрицей T и получаем:

Пункт отправления	Запасы груза	Пункты назначения				
		1	2	3	4	5
		Потребность				
		20	34	16	10	25
1	30	2 –	6 –	3 –	4 **5**	8 **25**
2	35	1 **20**	5 **15**	6 –	9 –	7 –
3	40	3 –	4 **19**	1 **16**	6 **5**	10 –

Очевидно, что для доставки груза по этому плану потребуется 8 временных единиц. Улучшим это решение.

2. Среди заполненных клеток найдем максимальное время доставки груза $t_{\max} = t_{15} = 8$. Вычеркнем все пустые ячейки с большим временем, ячейку $t_{24} = 9$ и ячейку $t_{35} = 10$.

3. Построим разгрузочный цикл для ячейки с максимальным временем доставки.

4. Определим величину $\rho = 5$ и проведем компенсации по вершинам цикла:

Пункт отправления	Запасы груза	Пункты назначения				
		1	2	3	4	5
		Потребность				
		20	34	16	10	25
1	30	2 –	6 –	3 –	4 **5+5**	8 **25-5**
2	35	1 **20**	5 **15-5**	6 –	~~9 –~~	7 **0+5**
3	40	3 –	4 **19+5**	1 **16**	6 **5-5**	~~10 –~~

Получим новый опорный план. К сожалению, ячейку 1,5 полностью разгрузить не удалось, надо строить новый разгрузочный цикл:

Пункт отправления	Запасы груза	Пункты назначения				
		1	2	3	4	5
		Потребность				
		20	34	16	10	25
1	30	2 **0+20**	6 –	3 –	4 **10**	8 **20-20**
2	35	1 **20-20**	5 **10**	6 –	9 –	7 **5+20**
3	40	3 –	4 **24**	1 **16**	6 **5**	10 –

Проведя второй компенсационный цикл, получим новое решение:

Пункт отправления	Запасы груза	Пункты назначения				
		1	2	3	4	5
		Потребность				
		20	34	16	10	25
1	30	2 **20**	6 –	3 –	4 **10**	8 –
2	35	1 –	5 **10**	6 –	9 –	7 **25**
3	40	3 –	4 **24**	1 **16**	6 –	10 –

Теперь зачеркнутыми становятся три ячейки. Время доставки груза составляет семь временных единиц, а денежные затраты – 276.

Результатом данной статьи является математическая формулировка задачи доставки груза в кратчайшие сроки и алгоритм уменьшения финансовых затрат на доставку груза в кратчайшие сроки. Остаются открытыми вопросы единственности оптимального плана, сходимости алгоритма уменьшения затрат при доставке груза в кратчайшие сроки и др.

1.Снитюк В.Е., Джулай А.Н. Интеллектуальная технология оптимизации пути следования пожарного расчета к месту пожара //www.iissvit.narod.ru.

2.Лукинский В.С., Зайцев Е.И., Бережной В.И. Модели и алгоритмы управления обслуживанием и ремонтом автотранспортных средств. – СПб.: СПГИЭА, 1997. – 52 с.

3.Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. – 2-е изд. – М.: Финансы и статистика, 2006 – 432 с.

4.Зайченко Ю.П. Исследование операций: Нечеткая оптимизация. – К.: Выща шк., 1991. – 191 с.

Получено 23.02.2009